



# 解難之趣

新界西小學數學比賽特刊

2014年3月15日

## 遊戲



所謂遊戲，往往就是要參與者，在指定的限制（約定的遊戲規則）下，去解決一些與現實生活有關的問題。這些問題可能未必真會在生活中出現，但若投入「遊戲」當中，尋找出最有可能的解決方法，亦不愧是鍛鍊思考的好方法。

在數學的世界裡，推理及智力題可說是遊戲的表表者。遊戲所以令人著迷，就是玩遊戲者要與設計者比拼智力的高低；利用設定問題的人所選定的限制，反其道思考，從中找出破綻，得出最合理的結果，這每每就是解難所需的技巧。讓我們從遊戲中學習怎樣「玩」遊戲吧！

例一：在一個城市裡，乘一專線公共汽車要 10 元。有 10 個初到該城的人乘車，走最前的一個交了 100 元給司機，司機一句不問，也不數一數有幾人，便交了 10 張車票給他，問在甚麼條件下，司機會這樣聰明？

解答：驟眼一看，似乎沒有甚麼漏洞，但為甚麼司機不聞不問，馬上就給他 10 張車票呢？莫非是熟客（錯了！），有別的溝通技巧，令司機可以明白乘客的需要？還是有更深一層的意義？其實大家不妨檢討一下自己思考上是否有一些盲點——細心嘴嚼题目的每一個詞語，破綻就在其中。

題目裡提到那乘客給了司機 100 元，問題就在這 100 元上！為什麼？



100 元是怎麼樣的？

一張紅色的紙幣！是嗎？

可否想過是 10 個 10 元硬幣？答案就是這樣！還不懂？想想看。

同學請不要報以「噓」聲，說筆者「捉字蝨」，在實際的情況裡，破解重大案件的重要線索，往往就是那些最不起眼的蛛絲馬跡啊！所以，除了要當心日常太慣用的字眼外，一些小節亦經常是「解難」重要的線索！

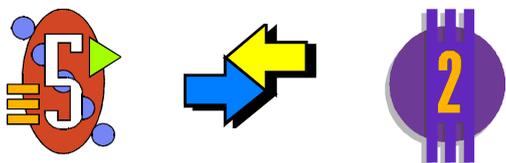
進入「策略」、「解難」的世界前，先玩玩遊戲吧！





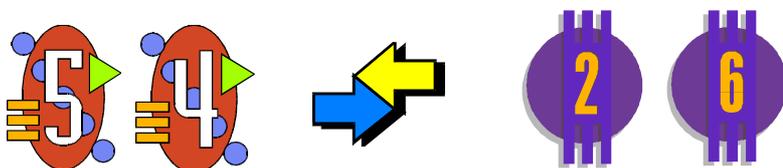
例二：從 1 至 9 當中，輪流抽取號碼，若手中的任何三個數字的和是 15，該方就算勝出。  
 你有沒有必勝法？

解答：同學或許不加思索就說：「有！」，「真的嗎？」同學相信一定不會服氣，躍躍欲試要跟筆者較量一下。好！儘管放馬過來，先取個「5」——同學雖有信心，但也不是魯莽之輩，很快就知道要在這比拼中勝出，當然要先取這個關鍵的「5」啦！好的開始，就是成功的一半。

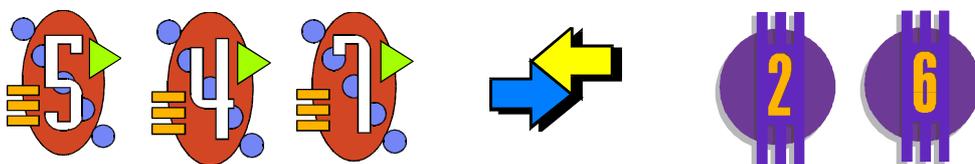


不過，筆者也不是弱者，你取個「5」嘛！我就.....取個「2」吧。同學會取個甚麼數字呢？取個「4」，只要

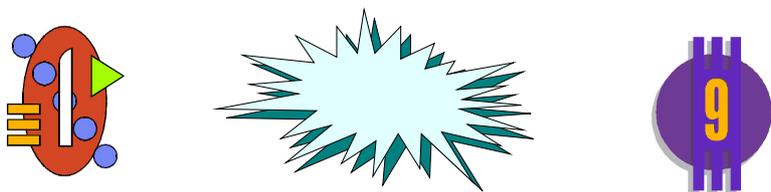
再取一張「6」，就可湊夠 15 取勝。筆者只得取守勢，拿下那個「6」。此時筆者手中有「2」、「6」各一張，只消再取一個「7」，亦可湊足 15 取勝。



此時，同學就不得不採取守勢，取去那個「7」。不過，此刻手中有「4」、「5」、「7」各一張，只消取個「3」，就能以  $3 + 5 + 7$  湊夠 15 勝出；正好反守為攻。



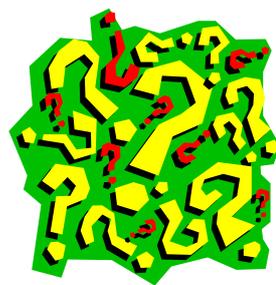
筆者只好取去那張「3」。現在筆者手上有「2」、「3」、「6」各一張，雖無勝算，但一經盤算，發覺同學手上都是些較大的數字，唯一勝算，一定要取一張「1」，組成  $1 + 5 + 9 = 15$ ，若同學取去張「1」，則筆者取去張「9」，那張「8」取不取都是一樣的。筆者輕易退卻同學的攻勢；也斷了同學的取勝之道。



同學是否不服氣呢？再玩一盤吧。是否仍是先取張「5」呢？

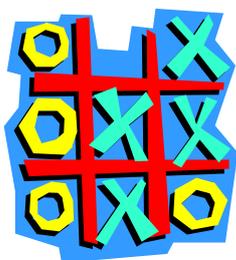
筆者曾經跟一群 IQ 很高的天才兒童交過手，起初他們都跟同學一樣，以為有必勝的策略；還很快就歸納到取「5」是致勝的關鍵。不過，筆者還是從容不迫地將他們一一拒諸門外。他們到底也是有腦的人，眾志成城，終於有一、二名小朋友參透箇中奧秘——

大家可有玩過打井（過三關）遊戲呢？相信這可是多此一問的了。但同學有否想過打井有必勝的策略嗎？同學或會沖口而出：「有！先佔中路。然後再攻四個角位，跟著來個『兩頭蛇』，不就勝券在握！」路子是對極了，不過，同學所遇的對手或許不是箇中高手，不然定是一時大意。你會攻佔中路，難道我就不會堅守四角？若然對手也知道箇中的奧秘，兩雄相遇，打井從來祇有和的份兒！



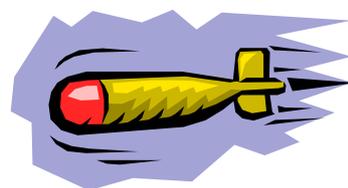
回到我們的抽 15 遊戲，遊戲規則雖然簡單，可組成 15 的組合卻著實不少，要知道有沒有必勝法也實在不易，不過一位數學家所想的極堪借鏡：他結合了幻方及打井的奧妙。

2	7	6
9	5	1
4	3	8



只要守方按著打井的策略，取去幻方上四角的數字，不掉以輕心的話，所謂「必勝」的策略都會被一一擊破。其實，這個抽 15 的遊戲還有另一個問題的，就是有沒有必不敗的策略。

記得多年以前，有一套名叫《真假戰爭》（電影原名叫《Tick-tack-toe》，根本就是打井的意思）的電影，講述一名青年成功進入美國國防部負責操控核彈的電腦，這部具有智能的電腦，跟那青年玩全球核戰遊戲。電腦越玩越起勁，而且，機械畢竟是機械，它不知道那青年只是跟它在玩遊戲，竟嘗試向蘇聯發射核彈。國防部人員試圖以更改密碼 (password) 去阻止發射，但它竟自行解碼，眼看一場滅世戰爭就要弄假成真，那青年想起這部電腦有關戰爭的智能技術是學自遊戲的，而第一個學的遊戲就是打井了。於是青年立刻教電腦玩打井，並命令它跟自己比賽。這部電腦跟自己苦戰一輪，仍無法取勝，因為電腦和它自己都是箇中高手，兩雄相遇，那有不和呢？最後電腦給弄致當機，從而知道一旦核戰，根本就和打井一樣，是沒有必勝的一方的。這電影久不久也會重播，有興趣的同學可留意了。



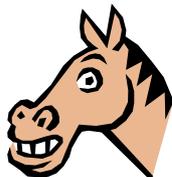
## 運籌學

除了這些「遊戲」外，在日常的生活也借用了不少「遊戲」的規例，來解決現實的難題，「運籌學」就是數學遊戲中一門很有趣的學問。

同學可曾聽過戰國時孫臏教田忌賽馬的故事嗎？

話說齊威王很喜歡賽馬，常跟將軍田忌比賽。以馬的質素而論，他們的馬大致可分

為上、中、下三等。由於就同等的馬來說，田忌的馬都不如齊威王的馬，因而他連輸三局。後來，田忌請教了當時著名的軍事家孫臏，孫臏向田忌獻策，重新規劃三種馬的出場次序：



- 第一場，用下等馬跟齊王的上等馬比，先輸一場；
- 第二場，用上等馬跟齊王的中等馬比，扳回一城；
- 第三場，用中等馬跟齊王的下等馬比，再贏一場；

結果，田忌以二比一獲勝，這就是歷史上有名的「田忌賽馬」故事。「以君之下駟對彼之上駟，以君之上駟對彼之中駟，以君之中駟對彼之下駟。」巧妙地安排上、中、下三種馬的出場次序，避重就輕，運用有限資源去取得最大的利益，就是「運籌學」的問題。

運籌規劃問題在日常生活有廣泛的應用，譬如銀行的櫃位如何安排，會令客人排隊輪候的時間最短，就是運籌學的其中一種應用了。同學可曾記得，以前的櫃位是各自排一條隊的，開 10 個櫃位，就各自排 10 條隊去輪候。後來，銀行改變策略，不論開多少個櫃位，都只排一條隊，當櫃位服務完客人後，再由人龍補上新的客人。同學不妨思考一下，這種排隊法是否真的比以前的更有效率？

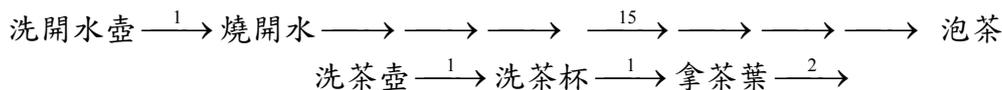
**例三：**甲、乙兩人各拿一個水桶到水龍頭前接水。水龍頭注滿甲的水桶要 8 分鐘，注滿乙的水桶要 5 分鐘。現在只有一個水龍頭可用，問怎樣安排甲、乙的先後順序，使他們所花的總時間最少？最少時間又是多少？

**解答：**同學或會以為，誰接先、誰接後，大家不也是要等，花的時間不也是一樣嗎？事實上，若果讓乙先接水，則乙花 5 分鐘去接水，甲就得等 5 分鐘，當乙接滿水後，甲去接水花 8 分鐘，但此時乙根本就無須再等，早就歸家了。故甲、乙花的總時間就是  $5 + 5 + 8 = 18$  分鐘。

相反，若讓甲先接水，則甲接水時乙得花上 8 分鐘在等候上，總時間就是  $8 + 8 + 5 = 21$  分鐘了。所以應該讓乙先接水。

**例四：**媽媽讓小明給客人燒水泡茶，洗開水壺要用 1 分鐘，燒開水要用 15 分鐘，洗茶壺要用 1 分鐘，洗茶杯要用 1 分鐘，拿茶葉要用 2 分鐘，為了使客人早點喝上茶，按你認為最適合的安排，多少分鐘就能泡茶了？

**解答：**安排如下：



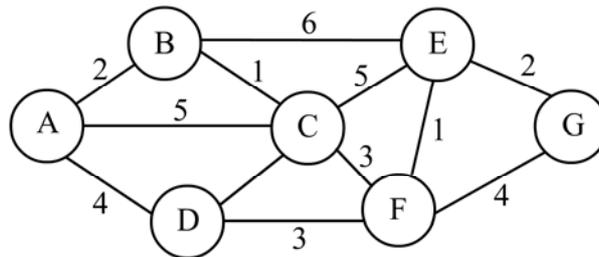
在等燒開水的過程中，由於有 15 分鐘的時間，足夠洗茶壺、洗茶杯、拿茶葉，故此只需  $1 + 15 = 16$  分鐘就能泡茶了。



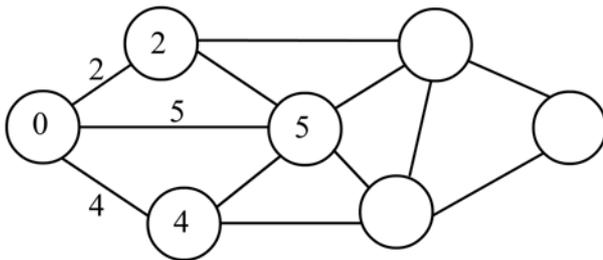
# 優選法

看過一些決定對策、規劃、安排做事次序的「運籌學」問題後，讓我們再看看與「運籌學」相似的另一類遊戲問題——優選法。

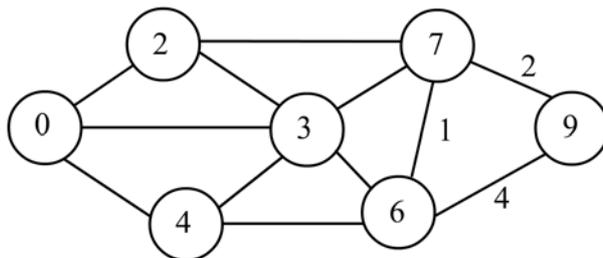
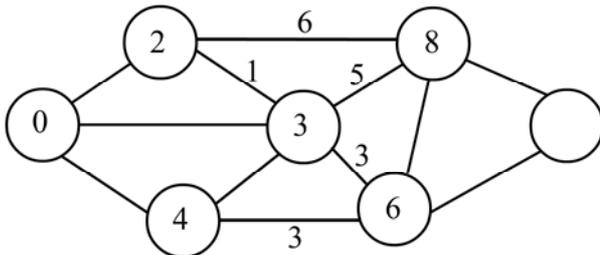
例五：一個城市的七個小鎮由高速公路連起，每段公路的長度標示於該段公路上，試求出由 A 鎮到 G 鎮的最短距離。



解答：用別的途徑思考一下，假若由 A 鎮分別到各個鄰鎮，把最短的距離記下：



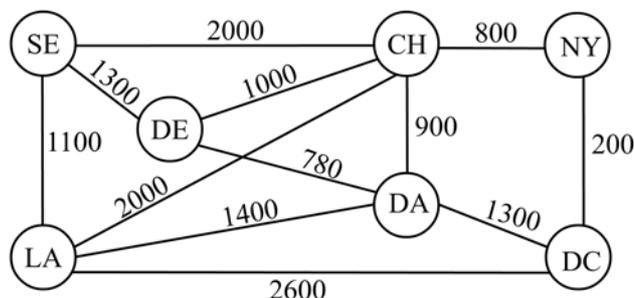
再用同樣方法處理其餘各鎮：



每次可能會更正前次的距離，從上圖，由 A 鎮至 G 鎮最近方法是由 A 鎮出發，經過 B、C、F、E 鎮後，再到 G 鎮，祇需走 9 公里。

當然，除了選取最短的路徑（選擇最優越的途徑）外，選擇最便宜的途徑（把距離的數字改成車資便可以），或者是最可靠的途徑（把可能的最長時間也計算，看看最長及最短時間的相差）的也可用上述的方法找出答案。

例六：要把下圖七個鎮用電纜連起，求應該怎樣連結可用最短的電纜（長度以公里為單位）？



解答：乍看之下，似乎要從每一個鎮開始到任一個鎮結束，那麼這道問題的確費時。不過重看這幅構圖，除了一個鎮外，其他的都有多於兩個的接連途徑，唯獨 NY 沒這個優勢，因而電纜祇可從 CH 或 DC 接連上。利用這個特徵，由 NY 出發至各地、或撇除 CH 或 DC 而連結其餘各地似乎更接近「優選途」，因此利用這點作開端，可得出最短的途徑是：LA—SE—DE—DA—CH—NY—DC。

$$\begin{aligned} \text{總長度} &= 1100 + 1300 + 780 + 900 + 800 + 200 \\ &= 5080 \text{ 公里。} \end{aligned}$$

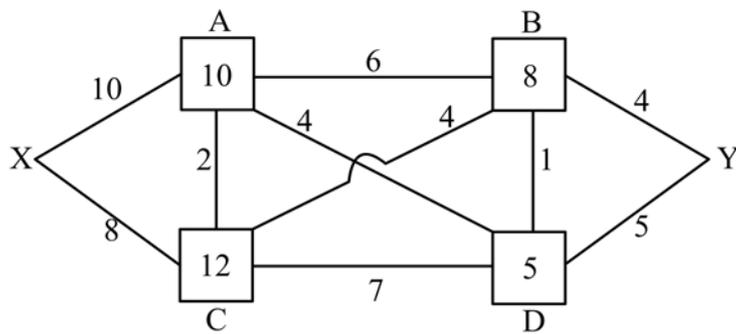
## 習題



- 黑板上畫了一個  $3 \times 3$  的棋盤形方格。甲、乙兩人可輪流在方格內寫上 1、2、3、4、5、6、7、8、10 這 9 個不同的數字，但兩人不許寫重複數字，甲計算第一行與第三行六個數的和，乙計算第一列與第三列六個數的和，誰算出的數大誰就贏，如果甲先寫，有沒有必勝的方法？
- 甲、乙、丙、丁四人去某辦公室洽談業務，甲談完要 18 分鐘，乙談完要 12 分鐘，丙談完要 20 分鐘，丁談完要 5 分鐘。問辦公室人員怎樣安排四人的談話順序，使四人所花的總時間最少？最少時間又是多少？
- 小明要騎自行車外出。外出之前必須做完下面幾件事：自行車打氣要用 2 分鐘，整理宿舍要用 7 分鐘，擦皮鞋要用 2 分鐘，把衣服放進洗衣機要用 1 分鐘，洗衣服要用 12 分鐘，再把衣服沖洗淨、擠乾、曬出要用 5 分鐘。問小明怎樣安排，使所需的時間最少？



4. 下圖是由X往Y的路線圖。方格表示隧道，方格內的數字表示該條隧道的隧道費。直線表示道路，直線上的數字表示該段路的長度（以公里計算）。假設車輛行駛每公里要用0.5元的燃油；每條路線上所花的費用包括隧道費和燃油費。



- (a) 求採用路線 $X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Y$ 要花費多少元？  
 (b) 求採用路線 $X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Y$ 及 $X \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow Y$ 的花費相差多少元？  
 (c) 由X往Y的最短路程（不計隧道長度）是多少公里？  
 (d) 由X往Y的最便宜路程要花多少元？

**解答**



1. 參考下表甲計算的和是： $A + B + C + G + H + I$ ；  
 乙計算的和是： $A + D + G + C + F + I$ 。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

↑                      ↑  
 第                      第  
 一                      三  
 列                      列

	B	
D		F
	H	

← 第一行  
 ← 第三列  
 ↑                      ↑  
 第                      第  
 一                      三  
 列                      列

因為兩人都有 A、C、G、I，所以這 4 個數字完全不影響甲、乙所寫的數之和的大小。甲取勝的關鍵是要使  $B + H > D + F$ 。若甲先行，當然把最大的 10 填入乙無法得利的 B 或 H 處，乙若果與甲爭大數字，只有將 8 填入 D 或 F 處。

	10	
8		D
	H	

→

	10	
8		1
	2	

但如此一來，甲只消將 1 填入 D 或 F 處，則  $D + F \leq 8 + 2 = 10$ ，就算乙還以顏色，把 2 填入 H 處，但甲仍有  $B + H > 10$ ，這一項必勝的一著，以後甲、乙填入的 4 個數字，由於是大家共有的東西，填入甚麼也沒有相干。

	10	
	1	

→

	10	
2		8
	1	

若果甲在 B 處填入 10 後，乙在 H 位填入 1，則甲還以顏色，在 D 或 F 處填入 2，則乙在 D 或 F 填入 8，仍然會因為  $8 + 2 < 10 + 1$  而落敗。所以甲一定贏。

2. 安排的原則是讓談話時間短的人在前面談，那後面的人等的時間才會較短，所以談話的先後次序應該是丁、乙、甲、丙。

丁：談話用去 5 分鐘；

乙：等 5 分鐘，自己談 12 分鐘，共用去 17 分鐘；

甲：等 17 分鐘，自己談 18 分鐘，共用去 35 分鐘；

丙：等 35 分鐘，自己談 20 分鐘，共用去 55 分鐘。

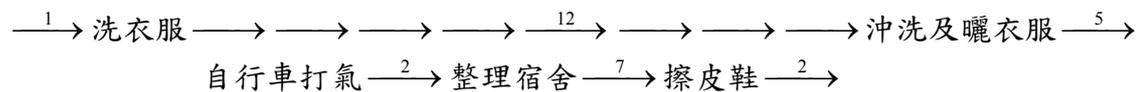
四人所用的最少時間 = 5 + 17 + 35 + 55

$$= 112 \text{ 分鐘。}$$



3. 經驗告訴我們，能同時做的事，盡量同時去做，這樣可以節省時間。安排如下：

把衣服放進洗衣機



所以最少時間 = 1 + 12 + 5

$$= 18 \text{ 分鐘}$$

4. (a) XABY 的費用 =  $(10 + 6 + 4) \times 0.5 + 10 + 8 = 28$  元

(b) XCDY 的費用 =  $(8 + 7 + 5) \times 0.5 + 12 + 5 = 27$  元

$$\therefore \text{差額} = 28 - 27$$

$$= 1 \text{ 元}$$

(c) X 至 Y 的最短距 =  $8 + 4 + 4$

$$= 16$$

(d) X 至 Y 的最便宜路程是 X  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  Y。

$$\text{最少費用} = (10 + 4 + 5) \times 0.5 + 10 + 5$$

$$= 24.5 \text{ 元}$$

