

解難之趣



新界西小學數學比賽專題特刊

二零一一年三月十九日

工程問題



工程問題又稱為工作問題。們這裡討論的工程問題，是分數應用題的一個特例。一般的解決方法，會使用假設法。

假設法是數學上常用的一種分析問題的方法。我國古代的「雞兔同籠」等數學問題，都可以用假設法進行解答。有時依據問題的演變情況，常假設某項工作已完成，並按這樣的假設進行解答。在解答分數應用題，特別是關於「工程問題」時，常把全工程假設為1。

工程問題是研究工作量、工作效率和工作時間之間的相依關係。不過，這類索涉分數應用的工程問題，所指的工作量與工作效率都不是具體數值，而是抽象的量，常用「1」表示，解題原理與行程問題相似。其基本公式為：

$$\begin{aligned} \text{工作量} \div \text{工作效率} &= \text{工作時間} \\ \text{工作量} \div \text{工作時間} &= \text{工作效率} \end{aligned}$$

例一：一項工程，甲獨自做4天完成，乙獨自做3天完成，丙獨自做5天完成，若三人合做，要多少天完成？

解答：此題沒有給出這項工程的總量是多少，也沒有辦法求出工程總量，但依據分數

意義，可假設工作量為1，這樣甲每天可完成工作總量的 $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ ，

乙每天可完成工作總量的 $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ ，丙每天可完成工作總量的 $1 \div 5 = \frac{1}{5}$ 。

$$\begin{aligned} \text{三人合做一天可完成工作總量} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{47}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{三人合做，所需之日數} &= 1 \div \frac{47}{60} \\ &= 1 \frac{13}{47} \text{天。} \end{aligned}$$

例二：一件工程，甲獨自做6天可完成，乙獨自做8天可完成。現在丙先獨做3天，完成了工程總量的 $\frac{1}{4}$ ，餘下部份則由甲，乙，丙三人合做。問還需要多少天才完成此項工程？

解答：在首四分一的工程中，可求出丙的工作效率 = $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} \text{因此，三人合做的總工作效率} &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

所以，要完成餘下之四分三工程，

$$\begin{aligned} \text{所需的日數} &= \frac{3}{4} \div \frac{3}{8} \\ &= 2 \text{天} \end{aligned}$$



例三：一件工作，甲、乙兩人合作可於8天完成；乙、丙合作則要6天才可完成；而丙、丁合作則要12天才可完成，若甲、丁兩人合作，需要多少天才可完成？

解答：解這種資料繁多的題目，要是能善用列方程的技巧，不怕同時出現的好幾個未知數(variable)，問題當可迎刃而解。

設甲一人獨做需 x 天完成工作，則甲一天能完成整件工作的 $\frac{1}{x}$ 。

同理，設乙、丙、丁三人獨自完成同一件工作分別需 y 、 z 、 w 天，則他們一天能完成整件工作的量分別為 $\frac{1}{y}$ 、 $\frac{1}{z}$ 、 $\frac{1}{w}$ 。依題意得，



$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} & \dots\dots(1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} & \dots\dots(2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{12} & \dots\dots(3) \end{cases}$$

巧妙之處出現了！將(1)式 - (2)式 + (3)式，剛好得到甲、丁合做一天的工作量，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{w} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

甲、丁一天能完成工作的 $\frac{1}{24}$ ，所以兩人需24天完成整件工作。

例四：某工程先由甲單獨做6天，再由乙單獨做1天即可完成。如果由甲、乙合做， $2\frac{2}{3}$ 天就可完成。現在甲先單獨做4天，然後再由乙單獨完成餘下部份，問還需要多少天？

解答：設總工作量為1。另設甲、乙一天能完成的工作量分別為A、B，我們有以下方程式：

$$6A + B = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2\frac{2}{3}A + 2\frac{2}{3}B = 1 \dots\dots\dots (2)$$

將(2)式簡化，得

$$A + B = \frac{3}{8} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1)式 - (3)式，得 \quad 5A = \frac{5}{8}$$

$$A = \frac{1}{8}$$

$$將 A = \frac{1}{8} 代入(3)式，得 B = \frac{1}{4}。$$

$$\therefore 甲工作4天，完成整件工程的 $\frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$$$

$$\therefore 乙完成餘下工作所需的日數 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{4} \\ = 2天$$

例五：一項工程，甲獨自做要40天才完成，而乙則要獨自做60天才完成。現兩人合做過程中，甲因事被調離開幾天，這樣該項工程共用了27天才完成，問甲曾離開多少天？

解答：甲獨做工程要40天完成，所以甲一天能完成工程的 $\frac{1}{40}$ ；

同理，乙一天能完工程的 $\frac{1}{60}$ 。所以

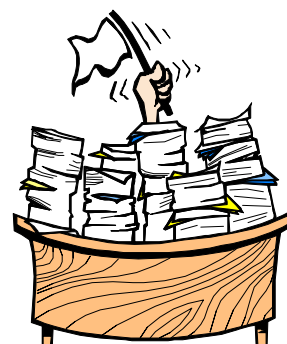
$$兩人一天能完成整件工程的量 = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60}\right) \\ = \frac{1}{24}$$

設甲被調離工程x天，則我們有下式：

$$\left(\frac{1}{60}\right)(x) + \left(\frac{1}{24}\right)(27 - x) = 1$$

$$\frac{x}{40} = \frac{1}{8}$$

$$x = 5$$



例六：用三根水管向一空水池灌水，單開甲管45分鐘能注滿水池；單開乙管50分鐘能注滿水池；單開丙管1小時能注滿水池。現在三管齊開5分鐘後，關閉甲管，再過5分鐘後，關閉乙管，爲了不使水池滿溢，幾分鐘後關閉丙管？

解答：於最初5分鐘，三管齊開的總入水量 = $\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{60}\right) \times 5$

$$= \frac{53}{180}$$

而下一次5分鐘裡，乙、丙管的入水量 = $\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{60}\right) \times 5$

$$= \frac{11}{60}$$

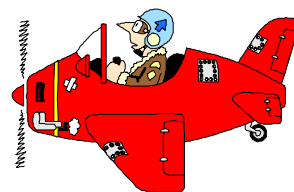
因此，10分鐘後，水池沒有注水的分量 = $1 - \frac{53}{180} - \frac{11}{60}$

$$= \frac{47}{90}$$

所以，10分鐘後，丙管注滿水池所需的時間 = $\frac{47}{90} \div \frac{1}{60}$

$$= 31\frac{1}{3}$$

∴ 爲免池水滿溢，再過 $31\frac{1}{3}$ 分鐘需要關閉丙管。



習題



1. 一件工作，甲獨自做10小時完成，乙單獨做15小時完成，兩人合做2小時後可完成多少？
2. 甲、乙兩人共同完成一件工程，需時12天。若甲獨自完成該項工程時，需時20天，這樣，若乙獨自完成同樣的工程，則需要多少天？
3. 某項工程，當甲、乙兩人合作時，要6天才完成；而當乙、丙合作時，則需要8天；而甲、丙合作，則要12天，若三人合作，需要多少天？
4. 一件工程，甲先做5小時，再由乙做3小時可完成。若乙先做9小時，則甲需再再做3小時方可竣工。那麼，若先甲做1小時，才由乙完成餘下的部份，則乙需時多久完成？

5. 一件工程，甲獨自做6天完成，乙獨自做8天完成；現在乙、丙先合做3天，完成了工程總量的 $\frac{3}{4}$ 。而餘下部份則由甲、乙、丙三人合做，問還需要多少天才完成該項工程？
6. 一件工程，甲獨自做10小時完成，乙獨自做15小時完成，丙獨自做20小時完成。現在三人合做，甲因事要中途提前離開，這樣共用了6小時才完成任務，問甲做了多少小時？
7. 一項工程，甲、乙合作在6日內完成工作的 $\frac{1}{3}$ ，以後由乙、丙合作做了2日，完成餘下工作的 $\frac{1}{4}$ ，最後由甲、乙丙三人合做5日才完成整項工程。如果三人獨自完成工程，各需要多少日？
8. 一個水池安裝了進水管，出水管各一根。單開進水管5分鐘可注滿全池；若單開出水管，8分鐘放光池水。現在池內有水，佔總容量的 $\frac{2}{5}$ ，若同時把兩管齊開，多少分鐘後才可注滿全池？
9. 有一水池，內有甲、乙兩條注水管，下面裝有丙管放水。要灌滿一池水，單開甲管需要5分鐘，單開乙管需要10分鐘；若要排完一池水，單開丙管要15分鐘。如果池空時，將甲乙丙三管齊開，2分鐘後關閉乙管，問幾分鐘後可注滿水池？

解答

1. 因為甲獨做10小時可完成，所以甲1小時能完成工作的 $\frac{1}{10}$ ；乙1小時能完成工作的 $\frac{1}{15}$ 。所以甲、乙合做2小時，能完成整件工作的 $(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}) \times 2 = \frac{1}{3}$ 。
2. 甲獨做工作可於20天完成，所以甲一天可完成工作的 $\frac{1}{20}$ 。設乙可於y天完成工作，則乙一天可完成工作的 $\frac{1}{y}$ 。則我們可得下式：

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

$$y = 30$$



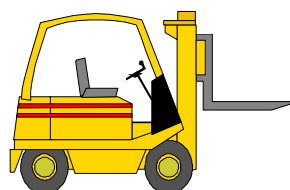
3. 設甲、乙、丙分別可於 x 、 y 、 z 天獨自完成工程，則一天他們分別可能成工程的 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{1}{y}$ 、 $\frac{1}{z}$ 。依題意得：

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} & \dots\dots(1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} & \dots\dots(2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} & \dots\dots(3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3)，得

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{16}$$



\therefore 三人合做一天可完成工程的 $\frac{3}{16}$ ，那麼，三人可以 $5\frac{1}{3}$ 天完成工程。

4. 設甲和乙1小時能完成整件工作的 $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$ ，則依題意我們有：

$$5\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right) + 9\left(\frac{1}{y}\right) \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{x} = 3\left(\frac{1}{y}\right) \quad \dots\dots(2)$$

將(2)代入(1)的左方或右方，則整件工作的工作量 = $5\left[3\left(\frac{1}{y}\right)\right] + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 18\left(\frac{1}{y}\right)$ 。

若甲工作1小時，完成整件工作的 $\frac{1}{x} = 3\left(\frac{1}{y}\right)$ ，所以乙需要15小時去完成餘下的工作。

5. 已知甲一天能完成工作的 $\frac{1}{6}$ ，乙一天能完成工作的 $\frac{1}{8}$ 。

設丙一天的工作量为 x ，則

$$\left(x + \frac{1}{8}\right) \times 3 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{所以，餘下工作日數} &= \left(1 - \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4} \div \frac{5}{12} \\ &= \frac{3}{5} \text{天} \end{aligned}$$



6. 已知甲、乙、丙三人分別能於1小時完成整件工作的 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{15}$ 、 $\frac{1}{20}$ 。

所以，甲、乙、丙三人合做1小時能完成的工作量

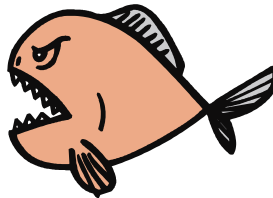
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{13}{60} \end{aligned}$$

乙、丙二人合做1小時能完成的工作量

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{7}{60} \end{aligned}$$

現假設甲與乙、丙二人合做了 x 小時後離去，則

$$\begin{aligned} \frac{13}{60}(x) + \frac{7}{60}(6-x) &= 1 \\ \frac{13x}{60} - \frac{7x}{60} &= 1 - \frac{7}{10} \\ \frac{x}{10} &= \frac{3}{10} \\ x &= 3 \text{ 小時} \end{aligned}$$



7. 甲、乙每天合共的工作量 = $\frac{1}{3} \div 6 = \frac{1}{18}$
 乙、丙每天合共的工作量 = $(1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{12}$
 而三人合共之工作量 = $(1 - \frac{1}{3}) \times \frac{3}{4} \div 5 = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \text{因此，甲每天的工作效率} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{乙每天的工作效率} &= \frac{1}{18} - \frac{1}{60} \\ &= \frac{7}{180} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{丙每天的工作效率} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{18} \\ &= \frac{2}{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以，甲獨自完成整項工程的日數} &= 1 \div \frac{1}{60} \\ &= 60 \text{ 天} \end{aligned}$$

$$\text{乙獨自完成整項工程的日數} = 1 \div \frac{7}{180}$$



$$= 25\frac{5}{7} \text{ 天}$$

$$\text{丙獨自完成整項工程的日數} = 1 \div \frac{2}{45}$$

$$= 22\frac{1}{2} \text{ 天}$$

8. 因為進水管5分鐘可注滿池水，出水管8分鐘可排光池水，那麼在1分鐘，進水管可注滿池水的 $\frac{1}{5}$ ，出水管可排去池水的 $\frac{1}{8}$ 。

今池內的水佔總容量的 $\frac{2}{5}$ ，則

$$\text{注滿池水所需的時間} = (1 - \frac{2}{5}) \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{8})$$

$$= 8 \text{ 分鐘}$$



9. 在1分鐘裡，甲、乙兩管分別可注滿池水的 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{10}$ ，丙管可排去池水的 $\frac{1}{15}$ 。今水

池並未盛水，三管齊開2分鐘可注滿池水的量

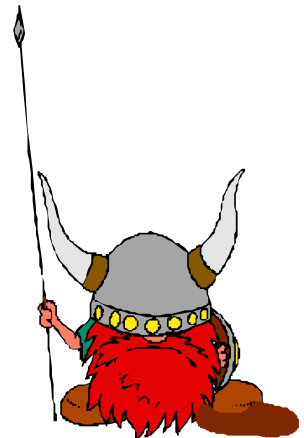
$$= 2(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15})$$

$$= \frac{7}{15}$$

2分鐘後，乙管關閉，甲、丙兩管齊開，注滿所餘池水的時間

$$= (1 - \frac{7}{15}) \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{15})$$

$$= 4 \text{ 分鐘}$$



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強