

解難之趣



屯門區小學數學比賽特刊

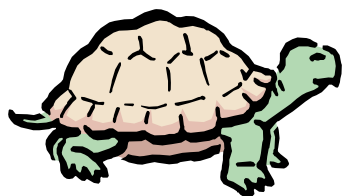
第十六屆

二零零六年四月二十二日

時間問題

驟眼看去，時間問題很容易，要中學生去解決連小學生都可以輕易解決的「慧居題目」，簡直有點侮辱智慧。不過，同學或許都會「見識」過以下例子：

例一：一口井10米深，烏龜每天早上爬3米，晚上跌2米，問烏龜要用多少天才能爬到井口？



分析：同學或許不假思索就說：「10天！每天早上爬3米，晚上跌2米，即每天爬1米，那10天不就能爬到井口嗎？」如果你這樣想的話，那你就錯過重要的「時機」了。

解答：因為在第8天晚上，烏龜離井口2米，第9天早上，烏龜再爬3米，已經超越井口！

不過有些要求嚴謹的同學會抗議：「烏龜每天只能爬3米，跌2米，但烏龜要吃飯、睡覺，不是永遠爬不到井口嗎？」對！但這是IQ題，不是數學題。在數學上，若我們假設烏龜可以不吃不睡，努力向上爬，那麼我們又如何捕捉最佳時機呢？讓我們看看以下例題：

第一時間

例二：地質隊員一次到了個晝夜溫度差別懸殊的地方，發現手錶白天快30秒鐘，夜裡慢20秒鐘。如果五月一日早上對準時間，到五月幾日手錶將快5分鐘？

解答：因為白天快30秒鐘，晚上慢20秒鐘，所以手錶每天就快了10秒鐘，

因此，到了5月2日早上就快了10秒鐘。由於5分鐘即是300秒，

那30日後不就快了5分鐘嗎？

答案是5月31日。

錯！錯！錯！

到了5月28日晚上，即對錶後的27天，手錶快了270秒，到5月29日早上，溫差令手錶再快30秒，這時手錶「第一次」足快了300秒，即係5分鐘。所以答案是5月29日。



看過上一例題後，同學或者發現，掌握「第一時間」是解這類題目的關鍵。讓我們再看下列的「放水題」。

例三：蓄水池有甲、丙兩條進水管，和乙、丁兩條排水管。要灌滿一池水，單開甲管要3小時，單開丙管要5小時。要排完一池水，單開乙管要4小時，單開丁管要6小時。現在池內有 $\frac{1}{6}$ 池水，如果按甲、乙、丙、丁的順序，循環開各水管，每次每管開1小時，問幾小時後水剛開始溢出水池？

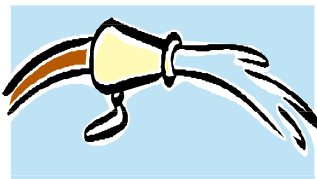
解答：甲、乙、丙、丁四條水管按順序各開1小時，所以4小時後，

$$\text{池內灌進的水是全池的} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{60}$$

$$\text{池中原有的水是全池的} \frac{1}{6}, \text{故還需灌水} 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \text{即可滿池。}$$

但是，我們不能直接用 $\frac{5}{6} \div \frac{7}{60}$ ，因為水管是循環打開的，循環幾次後，到甲管再打開時，池水會「第一次」滿溢，根本就無須再循環下去。問題到第幾次循環後，池水會少於 $\frac{1}{3}$ ，那時只消開甲管，就能滿溢。

如果經4個循環，



$$\text{灌入池的水量} = \frac{7}{60} \times 4 = \frac{28}{60}$$

$$\ominus \frac{5}{6} - \frac{28}{60} = \frac{22}{60} > \frac{1}{3}$$

\therefore 再開甲管1小時也不能滿池。

5個循環後，

$$\text{灌入池的水量} \frac{7}{60} \times 5 = \frac{35}{60}$$

$$\ominus \frac{5}{6} - \frac{35}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$



甲管需要再開令水開始滿溢的時間

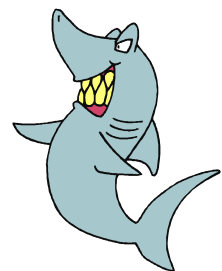
$$= \frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \text{小時}$$

因此過了5個「循環小時」再加上甲管開 $\frac{3}{4}$ 小時後，池水即行滿溢，即

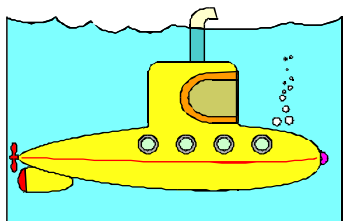
$$5 \times (\text{循環小時}) + \frac{3}{4} \text{小時}$$

$$= 5 \times 4 + \frac{3}{4}$$

$$= 20\frac{3}{4} \text{小時}$$



時鐘問題



介紹過捕捉「第一時間」的問題後，讓我們再介紹另一類常見的時間問題——**時鐘問題**。時鐘問題是研究鐘面上時針和分針關係的問題，鐘面的一周分為60格，當分針走60格時，時針正好走5格。所以時針的速度是分針的

$$5 \div 60 = \frac{1}{12}。$$

分針每走 $60 \div (1 - \frac{1}{12}) = 65\frac{5}{11}$ 分鐘，與時針重合一次。

時鐘問題變化多端，也存在著不少的學問。以下列出一個基本公式：

$$\text{初始需追及的格數} \div (1 - \frac{1}{12}) = \text{追及時間 (分鐘)}$$

例四：現在是4點正，甚麼時候時針與分針第一次重合？

解答：4點時分針指正12，時針指正4，分針在時針後 $5 \times 4 = 20$ 格。

由上述公式知道

$$\begin{aligned} \text{追及時間} &= 20 \div (1 - \frac{1}{12}) \\ &= 21\frac{9}{11} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$

\therefore 在4點 $21\frac{9}{11}$ 分，時針與分針第一次重合。

另解：

我們利用角度和方程式去解題。

已知鐘面一圈有 360° ，分針1分鐘行 6° ，時鐘1分鐘行 $\frac{1}{2}^\circ$ ；

4點正時，時針和分針相差的角度 = 120° 。

假設分針在 t 分鐘後與時針重合，則們得下列方程：

$$\begin{aligned} 6t &= \frac{1}{2}t + 120 \\ \frac{11}{2}t &= 120 \\ \therefore t &= 21\frac{9}{11} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$



例五：小明家有一個鐘，每小時慢2分鐘，早上8點鐘的時候，小明把鐘對準了標準時間。那麼當鐘走到12點正時，標準時間應是甚麼？

解答：由於鐘比標準時間每小時慢2分鐘，所以當標準時間走完60分鐘時，鐘只走完58分鐘，也就是說，鐘與標準時間的速度比 = 58 : 60。



由8點到12點，鐘慢了8分鐘，即是當標準時間12點正時，鐘所指的時間是11點52分，離12點還差8分鐘。所以當鐘走完這8分鐘，

$$\begin{aligned}\text{標準時間已過了} &= 8 \times \frac{60}{58} \\ &= 8 \frac{8}{29} \text{分鐘}\end{aligned}$$

∴ 當鐘走到12點正時，標準時間應是12時 $8\frac{8}{29}$ 分。

例六：有一個時鐘，它每小時慢25秒，今年9月21日中午12時正把時鐘調準，問這個時鐘下一次指示正確時間是幾月幾日幾時？

解答：當這個時鐘總有慢12個小時的時候，它又指示12時正，恰好就是準確的時間。所以我們必須先求出多少個小時後慢12個小時。

因為每小時慢25秒，而1小時 = $60 \times 60 = 3600$ 秒

$$\begin{aligned}\text{所以時鐘慢12小時所需天數} &= \frac{60 \times 60 \times 12}{25} \\ &= 1728 \text{小時} \\ &= 72 \text{天}\end{aligned}$$

最後只須求出9月21日後的72天是幾月幾日，因為9月有30天，10月有31天，11月有30天，所以，到了12月2日中午12時正，恰好是72天。

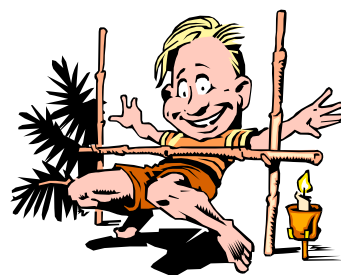
例七：一隻鐘的分針和時針安裝的位置剛好倒轉，問從零時開始晝夜24小時內，仍有**多少次**的讀數是正確的？

解答：儘管時針和分針位置剛好倒轉，但仍能讀出正確的時間，必定是時針和分針重合的時候。

$$\begin{aligned}\text{兩針重合1次的時間} &= 60 \div (60 - 5) \\ &= \frac{12}{11} \text{小時}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{24小時內重合的次數} &= 24 \div \frac{12}{11} \\ &= 22 \text{次}\end{aligned}$$

但0時和1時還有1次重合的時候，所以正確讀數應該是23次數。



例八：一個舊鐘的分針和時針每64分鐘（標準時間）重合一次。

問這個舊鐘一天（標準時間24小時）慢或快幾分鐘？

解答：前面已知標準鐘每 $65\frac{5}{11}$ 標準分鐘分針和時針重合一次，



舊鐘64分鐘重合一次，顯然舊鐘快了。

設舊鐘的分針用標準時間1分鐘走 x 格，

則舊針的時針速度為 $\frac{1}{12}x$ 格/標準分。

根據舊鐘時針和分針的重合時間為64標準分鐘，

得下列方程式：

$$60 \div (x - \frac{1}{12}x) = 64$$

$$x = \frac{60 \times 12}{64 \times 11}$$

$$x = 1\frac{1}{44} \text{ 格}$$

標準時間一天有 $24 \times 60 = 1440$ 標準分鐘（亦即1440格）。

$$\begin{aligned} \therefore \text{標準時間一天內舊鐘分針走的格數} &= 1440 \times 1\frac{1}{44} \\ &= 1472\frac{8}{11} \text{ 格} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{舊鐘比標準時間走快 } 1472\frac{8}{11} - 1440 = 32\frac{8}{11} \text{ 格。}$$

即舊鐘在標準時間一天內快 $32\frac{8}{11}$ 分鐘。

習題

- 井底有一只青蛙，已知井深24米，這只青蛙白天向上跳6米，夜裡又落下4米，問這隻青蛙多少天（一晝夜算一天）可跳出井外？
- 有一水池，裝有進水管、出水管各一條。單開進水管5分鐘可以注滿全池，單開出水管8分鐘可把滿池水放完。現在池內存水佔全池容量的 $\frac{2}{5}$ ，如果按進出的順序，循環開二水管，每次開1分鐘，問幾分鐘後水剛開始滿溢？
- 有一只船，出現一個漏洞，水以平均的速度進入船內，發現漏洞時，已進入一些水，如12人淘水3小時可以淘完，如果只有5個人淘水要10小時才能淘完。現在想用2小時淘完，需用多少人淘水？



4. 一個水池容積是 100 立方米，它有甲、乙兩條進水管和丙一條排水管，甲、乙管單獨注滿水池分別需要 10 小時和 15 小時。現在水池中有一些水，如果兩管同時進水並且丙管放水，需 6 小時將池中水放完；如果甲管進水而丙管放水，需要 2 小時將池中水放完，求池中原有多少水？
5. 張先生有一個準確的手錶，王先生的手錶每小時比張先生的錶快2分鐘。早上8點正，王先生的手錶與張先生的手錶校準時間，當王先生的手錶指正12點時，張先生的手錶指示的時間為何？
6. 時鐘在3點到4點之間，兩針成直角、重合、在一條直線上（指反向）各是幾點幾分？
7. 小強買了一隻手錶，他發現這手錶比家裡的掛鐘每小時快1分鐘。可是，家裡的掛鐘每小時比標準時間慢1分鐘。那麼小明的手錶到底準不準呢？
8. 王叔叔有一隻手錶，它比家裡的鬧鐘每小時快30秒；鬧鐘卻比標準時間每小時慢30秒，那麼王叔叔的手錶一天（24小時）比標準時間快／慢多少秒？
9. 小明在7點至8點之間解了一條題目，開始時分針與時針正好成一條直線，解完題時兩針正好重合。問小明解題共用了多少時間？
10. 3時正以後的甚麼時候，時針和分針在「4」的兩邊而離「4」的距離相等？
11. 甲、乙兩時鐘都不準確，甲鐘每走 24 小時，恰好快 1 分鐘；乙鐘每走 24 小時恰好慢 1 分鐘。假定在某天中午 12 時正將甲、乙兩鐘都調準，任其不停地走下去，那麼下一次兩時鐘都指向 12 時正，要隔多少天？
12. 一隻舊鐘面上的時針和分針每66分鐘重合一次，問這隻舊鐘在標準時間一天中快或慢幾分鐘？
13. 小明下午要到公司上3點的班，他估計快到上班時間了，於是看看屋裡的鐘，可是鐘早在12點10分就停了。他更換了電池後忘了撥針，匆匆離家，到公司一看離上班時間還有10分鐘。8小時工作後夜裡11點下班，小明回到家裡，一看鐘才9點正。假定他上班和下班在路上用的時間相同，那麼他家的鐘停了多長時間？



解答

1. 青蛙白天跳6米，夜裡滑落4米，即每天上升 $6 - 4 = 2$ 米。到了第9天，青蛙向上跳了 $9 \times 2 = 18$ 米，離開井口6米。因此，到了第10天，青蛙向上跳6米剛好到達井口，不用再理下落的4米。所以青蛙在第10天就跳出井外了。



2. 進、出水管各開1分鐘，水池灌入的水量佔全池的量 $= \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$
 $= \frac{3}{40}$

池中原有水佔全池的 $\frac{2}{5}$ ，故還需灌水 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ，即可滿池。

6個循環分鐘後，

$$\begin{aligned} \text{灌入池的水量} &= \frac{3}{40} \times 6 \\ &= \frac{18}{40} \end{aligned}$$

$$\ominus \quad \frac{3}{5} - \frac{18}{60} = \frac{6}{40} < \frac{1}{5}$$

\therefore 進水管需要再開 $\frac{6}{40} \div \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$ 分鐘，

池水剛開始滿溢。

$$\begin{aligned} \therefore \text{共需時} &= 6 \times 2 + \frac{3}{4} \text{分鐘} \\ &= 12\frac{3}{4} \text{分鐘} \end{aligned}$$



3. 這個問題的漏水，一邊淘，一邊水還不停地進入船內，淘水量超過進水量，才能淘完。第二種淘水法比第一種多淘 $10 - 3 = 7$ 小時，因此，第二種淘水法亦比第一種多淘7小時中漏進船的水。

第二種淘法做了 $10 \times 5 = 50$ 個工作小時，

第一種方法做了 $12 \times 3 = 36$ 個工作小時，

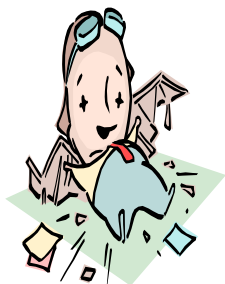
第二種方法比第一種多用了 $50 - 36 = 14$ 個工作小時，

由此可知，1小時的進水量，要用2個工作小時去淘乾。

現在的問題是，要立即算清淘光原進的水量需用多少個工作小時？從第一種淘法的36個工作小時去淘3小時進水所用的6個工作小時，就知道原進水量需30個工作小時才能淘乾。現在要2小時淘完進水，原進水量再加2小時進水量得

$30 + 2 \times 2 = 34$ 個工作小時，

故此需要 $34 \div 2 = 17$ 人。



$$4. \quad \text{甲管的注水速率} = \frac{100}{10}$$

$$= 10m^3/h$$

$$\text{乙管的注水速率} = \frac{100}{15}$$

$$= \frac{20}{3}m^3/h$$

設水池內原有水 xm^3 ，丙管的放水速率為 ym^3/h ，
則我們有

$$6(y - 10 - \frac{20}{3}) = x$$

及 $2(y - 10) = x$

$$\therefore 6(\frac{x}{2} - \frac{20}{3}) = x$$

$$3x - 40 = x$$

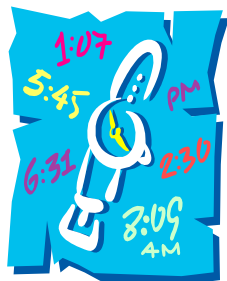
$$x = 20$$



5. 由於王先生的手錶每小時比標準（張先生的手錶）快2分鐘，所以當張先生的手錶走完60分鐘時，王先生的手錶已走了62分鐘，即

$$\text{標準時間：王先生手錶的時間} = 60 : 62$$

$$= 30 : 31$$



經過4小時後，張先生的手錶走了的時間

$$= \frac{30}{31} \times 4$$

$$= 3\frac{27}{31} \text{ 小時}$$

$$\ominus \frac{27}{31} \text{ 小時} = 45\frac{25}{31} \text{ 分鐘}$$

\therefore 當王先生的手錶指示12點正時，

張先生的手錶指示11點 $45\frac{25}{31}$ 分。

6. 已知分針每小時走 360° ，每分鐘走 $360^\circ \div 60 = 6^\circ$ ；

$$\text{時針每小時走 } 30^\circ, \text{ 每分鐘走 } 30^\circ \div 60 = \frac{1}{2}^\circ。$$

因為開始時是3時正，所以時針和分針相距 90° ，設「時機」在3時後的 x 分鐘出現，將題目看成「追及問題」，則由分針與時針構成直角得下式：

$$6x - (\frac{1}{2}x + 90) = 90$$

$$\frac{11}{2}x = 180$$

$$x = 32\frac{8}{11} \text{ 分鐘}$$

∴ 在3時 $32\frac{8}{11}$ 分鐘時針和分針成一直角。

由時針分針重合得下式：

$$6x = \frac{1}{2}x + 90$$

$$\frac{11}{2}x = 90$$

$$x = 16\frac{4}{11} \text{ 分鐘}$$

∴ 在3時 $16\frac{4}{11}$ 分鐘時針和分針重合。



由時針和分針成一直線得下式：

$$6x - (\frac{1}{2}x + 90) = 180$$

$$\frac{11}{2}x = 270$$

$$x = 49\frac{1}{11} \text{ 分鐘}$$

∴ 在3時 $49\frac{1}{11}$ 分鐘時針和分針成一直線。

7. 手錶走61分鐘，就是標準時間60分鐘，

所以手錶與標準時間的速度比 = 61 : 60。

而掛鐘走59分鐘，就是標準時間60分鐘。

假設手錶需要 x 分鐘，才相當於掛鐘的59分鐘，

則手錶與掛鐘的速度 = $x : 59$ 。

由比例相同得 $61 : 60 = x : 59$ ，

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{61 \times 59}{60} \\ &= 59\frac{59}{60} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$

也就是說，標準時間1小時，手錶走了 $59\frac{59}{60}$ 分鐘，

剛好慢了1秒。手錶不準。



首先，用比例式列出它們（秒針）的速率。當鬧鐘行了3600秒，手錶就行了3630秒，而標準時間行了3600秒，鬧鐘只行了 $3600 - 30 = 3570$ 秒，則

$$\begin{aligned} \text{鬧鐘時間} : \text{標準時間} &= 3570 : 3600 \\ &= 119 : 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{手錶時間} : \text{鬧鐘時間} &= 3630 : 3600 \\ &= 121 : 120 \end{aligned}$$

既然知道了手錶時間與鬧鐘時間的比例，又知道在過了1個標準小時，鬧鐘走了多少秒，設 x 為手錶在1個標準小時所走的秒數，得以下比例式：

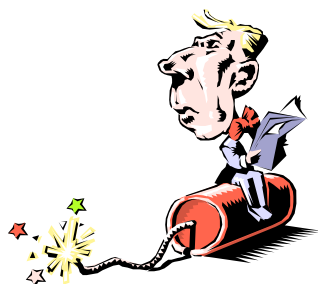
$$\begin{aligned} x : 3570 &= 121 : 120 \\ x &= 3599\frac{3}{4} \text{ 秒} \end{aligned}$$

因此，我們知道手錶時間比標準時間慢 $3600 - 3599\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ 秒。

\therefore 24小時內，手錶時間慢了 $\frac{1}{4} \times 24 = 6$ 秒。

8. 要求出小明花了多少時間解題，必須知道他何時開始，何時結束。

1) 小明開始解題的時刻：



因為小明開始解題時，分針和時針正好成一直線，也就是分針落後時針 $5 \times 60 = 30$ 格，而7點正時分針落後時針 $5 \times 7 = 35$ 格，因此在這段時間內分針要比時針多走5格，由公式知道

$$\begin{aligned} \text{追及時間} &= 5 \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) \\ &= 5\frac{5}{11} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$

\therefore 小明在7點 $5\frac{5}{11}$ 分開始解題。

2) 小明解題結束的時刻：

因為小明解題結束時，兩針正好重合，那麼從7點到這一時刻分針要比時針多走 $5 \times 7 = 35$ 格，由公式知道

$$\begin{aligned} \text{追及時間} &= 35 \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) \\ &= 38\frac{2}{11} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$

\therefore 小明在7點 $38\frac{2}{11}$ 分結束解題。

$$\begin{aligned} 3) \quad \therefore \text{小明花在解題的時間} &= 38\frac{2}{11} - 5\frac{5}{11} \\ &= 32\frac{8}{11} \text{ 分鐘} \end{aligned}$$

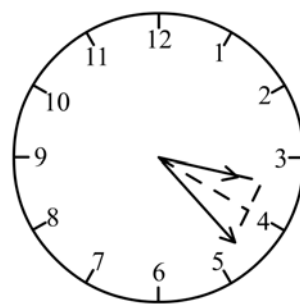


9. 在3時，時針和分針跟「4」字等距的機會，應該是介乎3時20分至25分之間，因為時針走不出「3」字與「4」字之間，分針也就只得在「4」字與「5」字之間了。

我們知道分針1小時走 360° ，時針1小時走 30° ，即在同1小時裡，分針每1分鐘走 $360^\circ \div 60 = 6^\circ$ ，時針走 $30^\circ \div 60 = 0.5^\circ$ 。設3時後的 x 分鐘後，「機會」出現，則

$$30 - \frac{1}{2}x = 6x - 120$$

$$x = 23\frac{1}{13} \text{ 分鐘}$$



10. 當甲、乙兩時鐘調整時間後，各自走24小時後，甲鐘指示的時間應為12時1分，乙鐘應為11時59分，如此類推，每過一天，兩時鐘指示的時間相差2分鐘。



這樣，當經過段長時間後，與標準時間相比，乙鐘慢的時間會逆時針方向靠近「6」字，甲鐘快的時間會順時針方向靠近「6」字，且速度相同。把它們看作相向運動，甲、乙之間的「距離」為 $60 \times 12 \times 2 = 1440$ 分鐘，它們的「速度和」為每天 $1 + 1 = 2$ 分鐘，則

兩時鐘再次同時指向12時正所需的天數

$$= 1440 \div 2$$

$$= 720 \text{ 天}$$

11. 設舊鐘的分針在標準時間1分鐘走 x 格，則舊鐘的時針速度為 $\frac{1}{12}x$ 格/標準分鐘。

根據舊鐘時針和分針的重合時間為66標準分鐘，得方程式：

$$60 \div (x - \frac{1}{12}x) = 66$$

$$x = \frac{60 \times 12}{66 \times 11}$$

$$x = \frac{120}{121} \text{ 格}$$

標準時間一天有1440標準分鐘；亦即1440格。

$$\therefore \text{標準時間一天內舊鐘分針走的格數} = 1440 \times \frac{120}{121}$$

$$= 1428\frac{12}{121} \text{ 格}$$

\therefore 舊鐘比標準時間走慢的時間

$$= 1440 - 1428\frac{12}{121}$$

$$= 11\frac{109}{121} \text{ 分鐘}$$



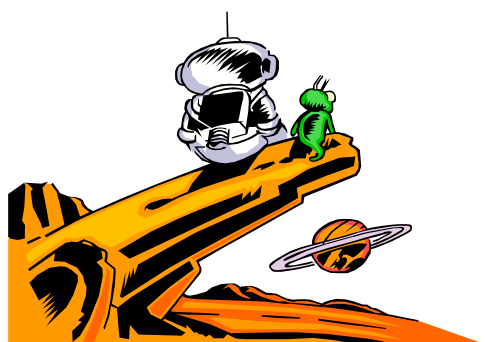
12. 解法一：



依題意，鐘停的時間與上班路上的時間之和
= 14點50分 - 12點10分
= 160分鐘
鐘停的時間與下班路上用的時間之差
= 11點 - 9點
= 120分鐘
因此鐘停的時間 = $(160 + 120) \div 2$
= 140分鐘

解法二：

小明在12點10更換電池，到回家的9點鐘，共8小時50分。
扣除早到的10分鐘及工作的8小時，餘40分鐘，
這是來回路上用的時間。因此路上單程要花 $40 \div 2 = 20$ 分鐘。
小明到公司時是2點50分，扣除路上的20分鐘，
離家的時間是2時30分，而他家的鐘面卻是12點10分，
中間差2小時20分鐘。
所以小明家的鐘停了140分鐘。



顧問老師：梁志明、黃萬安、黃偉智、楊振雄、袁仲強