數苗

中一數學輔助讀物

仁愛堂田家炳中學數學組編

一九九零年四月

目　　　　　　錄

生活的數學

「生命的數學」現象到處可見。

扔一塊骨頭，狗看到了，會毫不猶疑地沿直線追去。我們自然不會相信狗懂得兩點之間的距離，以直線為最短，祇是生存的本能，促使它這樣行動罷了。

人的血液，是靠血管輸送到身體各部份去。一個成年人的血管，總長近兩萬公里，接起來可以繞地球半圈。現在，人和動物的血管直徑比已經弄清楚了。這就是從主動脈開始，血管不斷地分成兩個直徑一樣的分支，並且總是按照 $1:\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 縮小。經過計算證實，按照這樣的比值，血液在血管中流動時，消耗的能量最小。

尤其令人驚異的是蜜蜂。這種小昆虫，能夠把蜂房正六棱柱底部的三個全等菱形的鈍角，都建成約 109.5°。計算確定，這樣的蜂房消耗材料最少。今天，我們已把蜜蜂和各種飛禽走獸，都請進了「仿生學」中來，充當我們的老師。

蔓生植物如牽牛花、菜豆、蛇麻草等，是沿著螺旋線的方向，纏繞其他植物往上長的。還有榆樹的葉子、橡樹的枝條，也是按照螺旋線排列的。根據數學的分析，這樣可以最有效地接受陽光照射。蝸牛殼、牛角等是螺旋線。甚至松鼠在樹幹上相互追逐，也是沿螺旋線奔跑的。這是從樹頂的一邊到樹底的另一邊的最短線。蛋白分子和核酸分子的空間結構，也是螺旋形結構，被稱為生物的基本結構。

長期自然選擇的結果，生物按照數學法則來選擇適應本身需要的形狀，這種事例太多了。

西瓜為甚麼長成球狀？任何體積的幾何體中，以球的表面積最小。西瓜長成球狀，就可以減少表面水份散失，有利於它傳種接代。

竹子長成空心圓錐形，可以用有限的表面積，獲得盡可能大的體積，這對於提高它的生存能力有利。

植物的葉子有葉脈。葉脈是輸送水分和養分的交通線。

科學家發現，各種植物葉子的幾何形狀雖然千差萬別，可是葉脈的圖案，卻與葉片形狀有著最經濟的對應關係。葉脈的圖案，能使維管束的數量最少，而運輸效果最好。已經有人提出來了，將來設計工廠或者城市的管道系統時，應該向植物的葉脈學習。

正負號和加減號

數學符號很重要。有了各種各樣的符號，在表達概念、說明關係和進行運算時，就既方便、又準備了。

十五世紀時，歐洲的商人在裝貨的箱子上，常劃一個"＋"號表示超重，劃一個"－"號表示不足。在數學上，最先採用這兩個符號的，是十五世紀德國的數學家魏德曼。因為使用"＋"、"－"號十分方便，後來就被人們普遍採用了。

請看這個式子：(-4) - (+9) - (-5) + (+2)，
在 4、9、5、2 前面的"＋"或者"－"號，是表示數的正負性質的，分別叫做正、負數，又叫做「性質符號」。在號之間的"＋"和"－"，是表示數的運算方法的，分別叫做加、減號，又叫做「運算符號」。

上式可以寫成 (-4) + (-9) + (+5) + (+2) 。在這裡，所有的運算都變為加法了。

要是把其中的加號全部省略掉，又得到 -4 - 9 + 5 + 2。在這裡，除了第一個符號還保留性質符號外，其餘各數前面的性質符號，都轉化成運算符號了。這種寫法叫做代數和，讀作 "負 4、減 9、加 5、加 2"、或者讀作 "-4 加 -9，加 +5，加 +2"。

這樣看來，在一定的條件下，性質符號和運算符號是可以互相轉化的。 "＋" 表示正或加， "－" 表示負或者減，就為這種轉化提供了形式上的方便。

正因為這樣，我們一定要明確正、負號和加減號是兩不同性質的符號，在實際應用中，一定要注意它們的聯繫和區別。

「0」和「無」

「無」在數量上可以用 0 表示。但是，「0」和「無」並不完全是一回事。

九世紀時，印度發現了一塊古老的紀念碑。在這塊石碑上，刻著一個數—— 270。考古學家說，這關於 0 的早期歷史紀錄。

0 的出現，看來和記數法有密切的關係。比如四個十加上五，可以記作 45；但是四個一百加上五，就不能再寫成 45 了。

最初，一個數的某一位數字沒有數，是在那一位上留下空位表示的。後來，為了避免弔起誤會，就在兩個數字中間，添上一個小圓點表示空位。再後來，這個小圓點又逐漸演變成 0 了。

「0」一經間世，它就一個獨立的數字，成為阿拉伯數

字的十個成員之一。

長久以來，因為人們經常用「0」來表示「無」，於是有些人就認為「0」祇能用來代表「無」。這樣看 0 是不對的。

某地的氣溫是攝氏 0 度，這個 0 度是不是表示沒有溫度呢，當然不是。攝氏 0 度相當於華氏 32 度。它表示了水的冰點，這樣一個確定的量，就是在一個大氣壓下，水在這溫度開始結冰。

在數軸上，O 是原點。以這點為界，凡是大於 0 的數右邊的點上，表示正數；凡是小於 0 的數左邊的點上，表示負數；並且離原點越遠的點，表示數的絕對值越大。所以 0 既不是正數，也不是負數。在數的世界中，0 是唯一的一個中性數，是正數和負數的 "分水嶺" 。

在直角坐標系中，x 軸上的點的 y 坐標都是 0；y 軸上的點的 x 坐標都是 0。

在近似計算中，也要注意 0 的使用。比如說 2.5 和 2.50 的含意就不同；2.5 表示精確到 0.1，而 2.50 表示精確到 0.01。所以，我們不能把 2,50 中最後的 0，理解為可有可無，隨便把它劃去。

電子計算機巧思妙算，又快又好，離不開 0。

0 也可以用來做序數。比如劃分時區設 0 區，寫書時把引言寫成第 0 章。這樣做，可以把 0 區和 0 章的特殊性表示出來。

今天，龐大的數學體學系及其應用，要是沒有了 0，那是不堪設想的。

隨著科學技術的發展，0 的念意和用處會更加豐富多彩。

漫話「π」

與圓有聯繫的圓形和物體 現實世界中實在是太多了！有關圓周長、弧長、圓面積、扇形、弓形面積的計算，有關圓柱、圓錐、圓台，球的表面積和體積的計算，某些特殊曲線長度的計算，某些特殊圓形（如橢圓）面積的計算，某些特殊幾何體（如橢球）的表面積和體積的計算等，所有這些計算都離不開一個重要的常數—— π，即圓周率。另外，在三角學、微積分及現代數學的許多領域，π 都有廣泛的應用。

π 到底是一個怎樣的數？

大家都知道，對於任何一個圓，它的周長與直徑的比都是一個確定的數，就是圓周率。因此，

$$\pi = \frac{\text{圓的周長}}{\text{圓的直徑}}$$

π 是希臘文 "圓周" 的第一個字母。在上述公式中，

當直徑 $=1$ 時，$\pi=$ 周長，所以 π 實際上是直徑為 1 個單位的圓的周長。英國數學家瓊斯於 1706 年，第一個用 "π" 表示圓周率，便一直沿用下來。

數學家們早已證明，π 是一個無限不循環小數，是無理數。數學家們也早已證明 π 不是任何代何代數方程的根，所以 π 又是一個「超越數」。

在我國古代有「周三徑一」之說，是說圓的周長大約是其直徑的三倍。π 取近似值 3，當然誤差較大。

在古代中國和別的國家，許多人用實驗的方法（即用繩子去量圓的直徑和周長）得到 π 的較為精確的近似值 3.1。我國東漢時的大科學家張衡估算 $\pi=3.16$。古印度以 $\sqrt{10}\approx 3.16$ 作圓周率。古希臘的數學家和物理學家阿基米德（公元前三世紀）通過計算圓內接和外切正 96 邊形的周長，將 π 的值計算確到 0.01，即 3.14，處於世界領先地位。在我國的魏晉時代（公元三世紀），有一位大數家劉徽，使用

"割圓術" 成倍增加圓內接正邊多邊形邊數，計算這些正多邊形的周長，當邊數愈來愈多時，正多邊的周長就越來越接近圓的周長。劉徽計算的結果是 $\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416$，是很了不起的成就。劉徽建議用 31.14 作圓周率，後人稱 3.14 和 3.1416 為「徽率」。

公元五世紀的南北朝時期，我國又出了一個大數家祖沖之。他繼續使用劉徽的 "割圓術"，把 π 計算到小數點第七位，得到 $3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7$，並以$\frac{22}{7}$ 和$\frac{355}{113}$ 兩個分數作為 π 的近似值，分別稱為「約率」和「密率」，而$\frac{355}{113}$ 後人也稱為「祖率」，直到一千年後歐洲人才找到了這個密率。祖沖之以驚人的毅力、熟練的計算技術、極端細緻的工作精神，算得直徑為 1 丈的圓內接正 24 576 邊形的周長是 3.141 592 6 丈。當時計算工具是「籌」，即小棒，把小棒擺在地上進行計算。可以想像，祖沖之為此付出了

多麼大心血！他對科學的偉大貢獻是中華民族的驕傲，他為科學獻身的精神更值得我們繼承和發揚光大。

16 世紀後，歐洲人發現了用「冪級數」來計算 π 值方法，使 π 的位數直線上升。16 世紀，德國有個叫盧道爾夫的人，他幾乎花費了畢生精力，把 π 值計算到了小數點後面 35 位即

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 88$$

根據他的遺囑，後人把這個結果刻在他的墓碑上。近年有人使用大型高速計算機, 把 π 的值計算到小數點後 150 萬位。若把這個長長的數字印成書，這本書就有好幾百頁！不過，計算到如此精確，已沒有多少實用價值了。一般的工程技術中，要求 π 精確到小數點後三、四位或五、六位即可；在許多科學研究中，要求 π 精確到小數點後七、八位也就足夠了。

借助梯形面積公式

德國大數家高斯 (Gauss)，小時候就很喜歡動腦筋。據說在他十歲的時候，有一次，老師在課堂上給同學們出了一道題：求從 1 到 100 所有整數的和。同學們個個都埋著頭一個數一個數地做加法，祇有小高斯坐在那裡出神。忽然地他舉起了手說；「老師，我做完了，和是 5050。」老師很驚奇，別的學生才做了幾個數的加法，高斯怎麼做得這樣快？

原來，高斯覺得做 99 次加法太麻煩了，要想竅門。他把這 100 個加數配成 50 對，即 1 和 100 、2 和 99、3 和 98、......、50 和 51，每一對之和都是 101，所以總和是 101✕50 = 5050。

利用高斯的辦法，請你計算一下 101 到 150 所有整數的和。

你會很快得出這 50 **個數的和是**

$$(101 + 150) \times 50 \div 2 = 251 \times 25 = 6275$$

這類求和題有一個特點：一系列加數有規律地排列，後一個加數總比前一個加數多 1**。我們可以總結出一個求和的公式：**

和 = (**最大數 ＋ 最小數**) **×加數的個數** ÷2

若用字母 S **表示和，**m **和** n **分別表示最大與最小加數，**K **表示加數的個數，則這個公式就是**

$$S = (m + n) \times K \div 2$$

請你再看一個題： $1 + 3 + 5 + ... + 99 = ?$

這是求 100 **以內所有正的奇數的和。這些數有一個特點：後一個數都比前一個數大** 2**，它也可以用高斯辦法來解**

決：

$$
\begin{aligned}
& 1+3+5+\dots+99 \\
&= (1+99)+(3+97)+\dots+(49+51) \\
&= 100 \times 25 \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

如果按上面的公式來計算呢？

$$
\begin{aligned}
S &= (1+99) \times 50 \div 2 \\
&= 100 \times 50 \div 2 \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

結果是一樣的。再如：

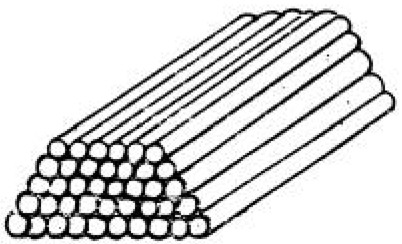
$$
\begin{aligned}
& 44+41+38+\dots+2 \\
&= (44+2)+(41+5)+\dots+(26+20)+23 \\
&= 46 \times 7+23 \\
&= 345
\end{aligned}
$$

如果也按上面的公式來計算，有

$$
\begin{aligned}
S &= (44+2) \times 15 \div 2 \\
&= 345
\end{aligned}
$$

結果又是一樣的。這個例子的特點是：後一個加數都比前一個加數小 3，而加數的個數是奇數，即相加時不能全部「配成對」，然而仍可用上面的公式來計算。這毫不奇怪，它說明了前面總結的公式很有用，可用來求一系列特殊數的和。這一系列數，後面一個與它前面一個的差都相等。這種有規律排列一系列數稱為「等差數列」。

附圖是一堆鋼管，最上面一層是 6 根，下一層都比上一層多一根，最下面一層是 10 根，共層。不用一根一根地去數，也不用一層一層地去加，你能很快算出這堆鋼管是多少根嗎？



如果這樣想：假如還有同樣多的鋼管，倒過來放，即最上一層放 10 根，最下一層放 6 根，共 5 層，那麼每一層都

是 $(10+6)$ 根。所以原來這批鋼管的總數是

$$S=(10+6)\times5\div2=40 \text{ 根}$$

此式與上面說的公式 $S=(m+n)\times K\div2$ 相一致，而思考問題的方法也與開頭的幾個例子相一致。它實際上就是等差數列的求和問題。

你看，這堆鋼管從兩頭看過去，多像一個梯形啊！其實，並不真正是梯形，但上面計算鋼管總數的公式又多像梯形的面積公式！我們把公式 $S=(m+n)\times K\div2$ 中的最數 m 和最小數 n 分別換成梯形的兩底 a、b，把公式中加數的個數 K 換成梯形的高 h，就成了梯形的面積公式 $S=(a+b)\times h\div2$ 了。這樣，我們把等差數列的求和問題和梯形的面積聯繫起來了，你看多有意思。

為了理解並記住等差數列的求和公式，我們借助於梯形的面積公式，太方便了。這種思考和記憶方法叫做「類比」。「類比」的方法可以把知識學得活、記得牢，比死記硬背強多了。

鳴謝

正豐書局贊助